

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(n)$$

البرهان: نعلم أن

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (M_{X_1}(t))^n = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}} \right]^n = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

وهي الدالة المولدة لكاي مربع بدرجة حرية n أي أن مجموع متغير عشوائي من توزيع كاي مربع n مرة واحد سوف نضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية n .

نظرية المعاينة:

تعريف المجتمع الأحصاء: هو كل الأسياء أو الأفراد التي ندرسها في الدراسة وعادة يوصف كل مجتمع إحصائي ~~بـ~~ باسم هذا التوزيع وإذا كان التوزيع توزيعاً منتظماً دعونا المجتمع ~~بـ~~ المجتمع إحصائي منقطع وموسط التوزيع هو وسطاء المجتمع الإحصائي وإذا كان التوزيع المستمر عندئذٍ ندعو المجتمع الإحصائي بالمجتمع الإحصائي المستمر ووسطاء هذا المجتمع سوف تكون نفس التوزيع الاحتمالي.

علم سبيل المثال ١

احتمالي

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي موصوف بالتوزيع البواسوني وسيطه λ عندئذٍ ندعو هذا المجتمع بالمجتمع ~~بـ~~ الاحصائي البواسوني بحيث λ يمثل وسيط هذا المجتمع وسلا ما ينطبق على التوزيع البواسوني ينطبق على المجتمع أيضاً إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي طبيعي وسيطه الأول μ

وعلم هذا المثال يوجد مجتمعان إحصائيتان لعدد التوزيعات الاحتمالية التي مرت معنا

العينات العشوائية

هي جزء من المجتمع الإحصائي تأخذ باستقلالية وبغير اعتماد وعادة يرمز بعلامات X_1, X_2, \dots, X_n وإذا كان حجم المجتمع n و n كان حجم المجتمع N محدد عندئذٍ $n \leq N$

ملاحظة ١

إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وهذا يعني لدينا متغير

عشوائي موصوف بتغير عشوائي طبيعي ولناخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n
 هذه العينة x_1, x_2, \dots, x_n هذه العينة

ومن المعلوم أن الوسط الحسابي لمكونات العينة لرمز \bar{x} وسوف يكون
 بين القوس $(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\bar{x} \sim$

$$E \bar{x} = E x = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{V(x)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

② لأن $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تحت صيغة متغيرة \bar{x}

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

④ من المعلوم أن

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$$

$\chi^2(n)$

$\chi^2(1)$

مع ملاحظة أن التوقع $E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1$

$$\Rightarrow E S^2 = \sigma^2$$

$$V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} V(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow$$

$$V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

أي أن تباين S^2 (تباين العينة) هو عبارة عن ضعف تباين المجتمع مع عدد التغيرات

مع ملاحظة إذا كانت n كبيرة بشكل كافٍ عندئذ $V(S^2) \rightarrow 0$ مع $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

⑤

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

وبهذه الطريقة يمكن ذلك على الشكل

$$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ولدينا أيضاً

عندئذ حسب نظرية التوزيع ستبدو نتيجته (إذا كان لدينا X متغيراً مقياسياً مكان X^2 عندئذ عرفنا توزيع ستبدو نتيجته بالمثل)

$$T = \frac{x}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n)$$

وهذا الملاحظة هنا أن Z متغيراً مقياسياً، و s^2 من مخرج مربع بدرجته $n-1$ وليوجد استقلال عندئذ

$$T = \frac{z}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \sim t(n-1)$$

بموضع

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{n(n-1)}}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ملاحظة: إذا كان لدينا احتمالاً بمصاحبة عموماً يتوزع احتمالي أكثرنا منه عليه عموماً صحتها n حيث التوقع موجود والتباين موجود لهذا المجتمع عندئذ إذا كانت $n \geq 30$ فإن هذا المجتمع سوف يتقارب من التوزيع الطبيعي

ملاحظة (2): إذا كان لدينا احتمالاً بمصاحبة طبيعيان مستقلان الأول

$X \sim (m_1, \sigma_1^2)$ والثاني $Y \sim (m_2, \sigma_2^2)$ ولناخذ من المجتمع الأم صاتي الأول عنه ههنا n حيث الوسط الحاي \bar{X} ولناخذ من المجتمع الأم صاتي الثاني عنه ههنا m حيث الوسط الحاي \bar{Y} عندئذ

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

البرهان: لدينا $\bar{X} \sim N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n})$ و $\bar{Y} \sim N(m_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$ ومنه يكون

$$\bar{Y} - m_2 \sim (0, \frac{\sigma_2^2}{m})$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2) \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m})$$

وبالتالي

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

ملاحظة: إذا كان لدينا قمتا أمثلياً طبيعياً الأول $X \sim N(M, \sigma_1^2)$

والثاني عند القمت $Y \sim N(M_2, \sigma_2^2)$ ، ولنا قمتا الأول عينة عشوائية حجمها n حيث \bar{X} وسطها
والثاني \bar{Y} وسطها s_1^2 تباينها و s_2^2 تباينها s_1^2 هو الخراف المعياري وهذا الثاني عينة عشوائية حجمها m
وسطها \bar{Y} وتباينها s_2^2 هو الخراف المعياري عند

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}, \quad s_p = \sqrt{s_p^2}$$

مع الملاحظة أن

$$s_1^2 = s_2^2 = \sigma^2$$

البرهان: من الملاحظة السابقة لدينا

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

ولدينا أيضاً

$$(n-1)s_1^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$W = \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

وبالتالي

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2) \Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (M_1 - M_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}}}$$

$$\sim t(n+m-2)$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (n_1 - n_2)}{SP \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

توزيع فيشر أو F

إذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً أول فوهوف بالمتغير $X \sim X^2(n)$
وسان لدينا مجتمعاً احصائياً آخر من نوع $Y \sim Y^2(m)$
حيث يوجد استقلال عندئذ

$$f = \frac{\frac{\bar{X}}{\frac{1}{n}}}{\frac{\bar{Y}}{\frac{1}{m}}} \sim F(n, m) \Rightarrow f = \frac{\frac{m\bar{X}}{m\bar{Y}}}{\frac{m\bar{Y}}{m\bar{X}}} \sim F(n, m)$$

نظريته التقدير

نفرض لدينا مجتمع احصائياً فوهوفاً θ احصائي وسيطه المجهول
ولناخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n عندئذ إذا
علمت قيمة الوسيط θ فنكون على المجتمع الاحصائي آسرة وبالتالي
سوف نتعرف على نوعين من التقديرات على أساس عينة عشوائية
حجمها معلوم ويكون n النوع الأول هو التقدير النقطي والثاني التقدير
احصائي أو فترات الثقة للوسيط
وسوف نبدأ بالتقدير النقطي لرمز مادة للمقدر للوسيط θ و $\hat{\theta}$ وهذه
المقدر النقطي دائماً يكون تابع فقط لمتغير العينة العشوائية ولا يحوي وسيطاً
والبعين يدعى بالاحصاء

$$\hat{\theta} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

وعلى سبيل المثال \bar{X} يمثل مقدار احصاء

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

أيضاً احصاء

$$\sum_{i=1}^n x_i \text{ و } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

أيضاً احصاء

$$\frac{\bar{x}}{\theta} - s^2 \theta$$

ليكن

ومن أجل إيجاد المقدار التقني للوسط مجتمع احصائي سوف نتبع طريقتين
الطريقتين الأولى، الطريقة النزوم والثانية في الطريقة الاحصائية التقني
سوف نبدأ بالطريقة الأولى

من أجل أن نوجد المقدار التقني للوسط مجتمع احصائي كلاً من السلسلة
عشوائية ما خذوه منه سوف نتعرف على تقنيتهما هما كلاً من المجتمع الاحصائي
من المرتبة 1 و كلاً من السلسلة من المرتبة 2

لفرض أنه لدينا مجتمعاً احصائياً موزعاً احصائياً واخذنا منه عيناً
عشوائية حجمها n عندئذ بالتقريب كلاً من المجتمع الاحصائي من المرتبة 1
والذي نرسله بالرمز α_r

$$\alpha_r = E X^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

وفي الحالة الخاصة $r=1$ اذا كانت $r=1$ فنحصل على كلاً من المجتمع
الاحصائي من المرتبة الأولى:

$$\alpha_1 = E X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

وهذا يعني ان نحصل على كلاً من المجتمع من مرتبة 1 كما ان كلاً من السلسلة العشوائية
من المرتبة 1 والذي نرسله بالرمز m_r و r جميع موجب و

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{n}$$

وفي الحالة الخاصة يكون:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$$

وان شئنا ان نرسم الطريقة النزوم بإيجاد المقدار التقني لـ T
لنقترح ان المجتمع الاحصائي يكون بسيط واحد ولكن له عندئذ من أجل إيجاد
المقدار التقني θ ولين θ نتناول الراسل معادلات واحد في

$$m_1 = \alpha_1 \quad \theta = 0$$

اما اذا كان المجتمع الاحصائي يكون بسيطين θ_1, θ_2 عندئذ نتناول الراسل

جيد معادلين وهما $n_1 = n_2 = n$ | $\theta_1 = \theta_2$ | $\theta_1 = \theta_2$ | $n_1 = n_2 = n$

ولاً الحالة التي يكون فيها لدينا k وسيط فتحتاج إلى حل k معادلات وسوف تكون لدينا k معادلات على k مجهول فقط في إيجاد مقدار النقطة لإيجاد وسيط واحد وسيطين نفرض
لدينا مجتمعاً إحصائياً برتولياً وسيطه P ولناخذ من هذا المجتمع عينة
حجمها n ونعطي المقدار النقطة للوسيط P بطريقة العزوم.

بما أن المجتمع الإحصائي يحتوي وسيط واحد هو P فتحتاج إلى حل معادلة واحدة وهي

$$\bar{X} = P \quad \Rightarrow \quad P = \bar{X}$$

أي أن المقدار النقطة للوسيط P في المجتمع الإحصائي البرتولي مع أساس
عينة عشوائية حجمها n هو الوسيط الحسابي لتغيرات هذه العينة P

24/2/2024